Πιθανότητες 8ο μάθημα 2/11/2017

Τυχαία Μεταβλητή - Κατανομή

Παραδείγματα:

① Ρίψη ζαριού 1 φορά

$S = \{ ⚀, ⚁, \ldots, ⚅ \}$

$S_x = \{ 1, 2, \ldots, 6 \}$

② Φοιτητής απαντά σε 3 ερωτήσεις

Κάθε ερώτηση $\nearrow Σ$, $\searrow Λ$

$\underset{\uparrow}{2}\ \underset{\uparrow}{2}\ \underset{\uparrow}{2} = 2^3$

$S = \{ ΛΛΛ, \underbrace{ΛΛΣ, ΛΣΛ, ΣΛΛ}, \underbrace{ΣΣΛ, ΣΛΣ, ΛΣΣ}, ΣΣΣ \}$

Ενδιαφέρον: Αριθμό Σωστών Απαντήσεων $= X$ ← Τυχαία Μεταβλητή

$S_x = \{ 0, 1, 2, 3 \}$

Τυχαία Μεταβλητή

Ενδιαφέρει: Y = Κέρδος, τ.ω. κάθε ερώτηση $\nearrow Σ$ ← κερδίζει, $\searrow Λ$ ← χάνει

$S_Y = \{ -3, -1, +1, +3 \}$

③ Ρίχνουμε νόμισμα μέχρι να έρθει η 1η Κ.

$S = \{ K, ΓK, ΓΓK, \ldots, ΓΓ..ΓK, \ldots \}$

Ενδιαφέρει: Z = Πλήθος ρίψεων μέχρι την 1η Κ. ← τυχαία μεταβλητή

$S_Z = \{ 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots \}$

"Πρόχειρος Ορισμός": Τυχαία Μεταβλητή (τ.μ.) ονομάζεται μία συνάρτηση του αρχικού δ.χ. S σε ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Η τ.μ. συμβολίζεται με X, Y, Z, W και οι τιμές της με τα αντίστοιχα μικρά x, y, z, w.

Ερώτημα: Μπορώ να αξιοποιήσω την τ.μ. για υπολογισμό πιθανοτήτων? ή Έχει νόημα να αναζητώ την πιθανότητα μια τ.μ. να πάρει μια συγκεκριμένη τιμή?

πχ: Έχει νόημα $P(Y=-3)$?

$P(Y=-3) = P(ΛΛΛ) = 1/8$

$P(Y=-1) = P(ΛΛΣ \text{ ή } ΛΣΛ \text{ ή } ΣΛΛ) = 3/8$

διότι $= P(ΛΛΣ) + P(ΛΣΛ) + P(ΣΛΛ) = 1/8 + 1/8 + 1/8 = 3/8$

$P(Y=1) = P(ΣΣΛ \text{ ή } ΣΛΣ \text{ ή } ΛΣΣ) = 3/8$ (όπως πριν)

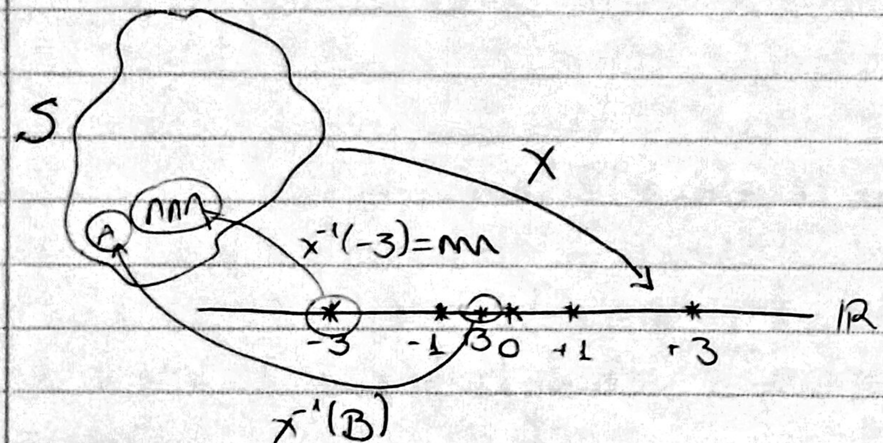
$P(Y=3) = P(ΣΣΣ) = 1/8$

$Z =$ Πλήθος ρίψεων μέχρι 1η κορώνα (Κ)

$Z = 1, 2, \dots, n, \dots$

$P(Z=n) = P(\underbrace{ΓΓ\dots Γ}_{(n-1)\text{φορές}}Κ) \overset{\text{ανεξαρτησία}}{=} \underbrace{P(Γ)\dots P(Γ)}_{n-1} \cdot P(Κ) =$

$\overset{\text{Αν } P(Γ)=p}{\underset{P(Κ)=1-p}{=}} (1-p) \cdot p \quad , \quad n=1,2,\dots$



Ορισμός:

Έστω χ.π. (S, A, P). Ονομάζεται τ.μ. μια συνάρτηση $X: S \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα ότι $\forall$ (Borel) υποσύνολο B του S η $X^{-1}(B) = \{s \in S : X(s) \in B\} \in A$

SOS

Ορισμός: ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ (α.σ.κ.)

Έστω $(S, \mathcal{A}, P)$ χώρος πιθανότητας και X μια τ.μ.

Η α.σ.κ. της τ.μ. X συμβολίζεται με F_X, είναι μια πραγματική συνάρτηση: $F_X: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$F_X(x) \overset{\text{ορ}}{=} P(X \leq x) = P\left(\begin{array}{l}\text{όλων των τιμών της} \\ \text{τ.μ. } X \text{ που είναι } \leq x\end{array}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Παρατήρηση: Το σύνολο τιμών της F_X είναι $[0, 1]$

Παραδείγματα:

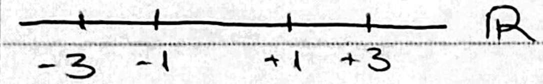
1. τ.μ. X με τιμές $x = -3, -1, 1, 3$

και $P(x=-3) = P(x=3) = 1/8$

$P(x=-1) = P(x=1) = 3/8$

Να προσδιορισθεί η F_X.

λύση



Αν $x < -3$, τότε $F_X(x) \overset{\text{ορ}}{=} P(X \leq x) = P(\emptyset) = 0$

Αν $-3 \leq x < -1$, τότε $F_X(x) \overset{\text{ορ}}{=} P(X \leq x) = P(x=-3) = 1/8$

Αν $-1 \leq x < 1$, τότε $F_X(x) \overset{\text{ορ}}{=} P(X \leq x) = P(x=-1 \text{ ή } x=-3) =$

$= P(x=-1) + P(x=-3) = 1/8 + 3/8 = 4/8 = 1/2$

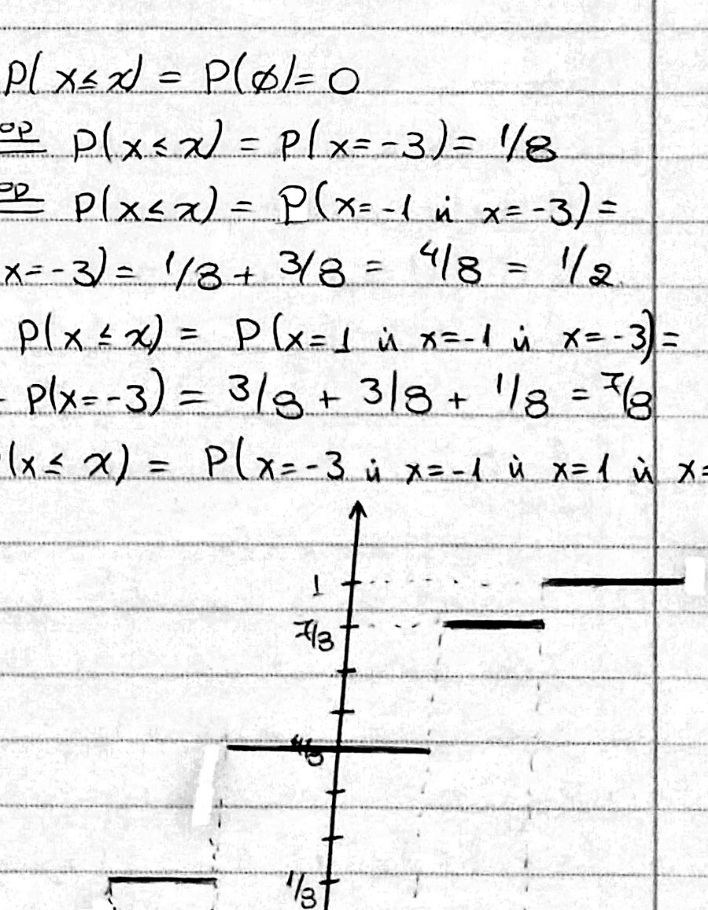
Αν $1 \leq x < 3$, τότε $F_X(x) \overset{\text{ορ}}{=} P(X \leq x) = P(x=1 \text{ ή } x=-1 \text{ ή } x=-3) =$

$= P(x=1) + P(x=-1) + P(x=-3) = 3/8 + 3/8 + 1/8 = 7/8$

Αν $x \leq 3$, τότε $F_X(x) \overset{\text{ορ}}{=} P(X \leq x) = P(x=-3 \text{ ή } x=-1 \text{ ή } x=1 \text{ ή } x=3) =$

$= \dots = 1.$

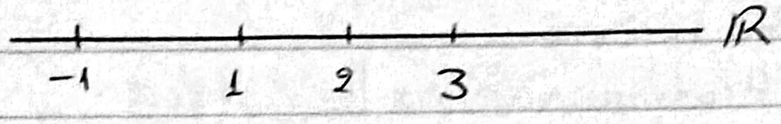
$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -3 \\ 1/8, & -3 \leq x < -1 \\ 4/8, & -1 \leq x < 1 \\ 7/8, & 1 \leq x < 3 \\ 1, & 3 \leq x \end{cases}$$



(2.) τ.μ. X τιμές $x = -1, 1, 2, 3$

$P(X=-1) = P(X=1) = 1/4$ $\quad P(X=2) = 1/6$ $\quad P(X=3) = 1/3$

$F_X(x) = ?$



Αν $x < -1$, $F_X(x) = P(X \leq x) = P(\emptyset) = 0$

Αν $-1 \leq x < 1$, $F_X(x) = P(X \leq x) = P(X=-1) = 1/4$

Αν $1 \leq x < 2$, $F_X(x) = P(X \leq x) = P(X=-1 \text{ ή } X=1) = \ldots = 1/4 + 1/4 = 2/4$

Αν $2 \leq x < 3$, $F_X(x) = P(X \leq x) = P(X=-1 \text{ ή } X=1 \text{ ή } X=2) = \ldots = 16/24 = 2/3$

Αν $3 \leq x$, $F_X(x) = P(X \leq x) = \ldots = 1$.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 1/4, & -1 \leq x < 1 \\ 2/4, & 1 \leq x < 2 \\ 2/3, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & 3 \leq x \end{cases}$$

Ιδιότητες α.σ.κ.:

Έστω F_X η α.σ.κ. της τ.μ. X. Τότε:

α) Η $F_X(x)$ είναι αύξουσα.

β) Η $F_X(x)$ είναι συνεχής από τα δεξιά

$$\lim_{x \to a^+} F_X(x) = \lim_{n \to \infty} F_X\left(a + \frac{1}{n}\right) = F_X(a)$$

γ) $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

Οι ιδιότητες αυτές αποτελούν και τις απαραίτητες συνθήκες που θα πρέπει να ικανοποιεί μια πραγματική συνάρτηση ώστε να είναι α.σ.κ.

Απόδειξη α: Έστω $x \leq y$

$\{X \leq x\} \subseteq \{X \leq y\}$, $\quad P(X \leq x) \leq P(X \leq y)$

$F_X(x) \leq F_X(y)$

Παράδειγμα:

ΝΔΟ οι πραγματικές συναρτήσεις $F_X(x) = \begin{cases} 1-e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

$F_X(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$, $x \in \mathbb{R}$ είναι α.σ.κ.

Είναι αύξουσα και συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$ $\Big\}$ είναι α.σ.κ.

Πρόταση:

Έστω τ.μ. X με α.σ.κ. F_X και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Τότε

α) $P(\alpha < X \leq \beta) = F_X(\beta) - F_X(\alpha)$

β) $P(X < \beta) = F_X(\beta -) = \lim\limits_{n \to \infty} F_X(\beta - 1/n)$

γ) $P(X = \beta) = F_X(\beta) - F_X(\beta -)$

δ) $P(X > \beta) = 1 - F_X(\beta)$

ε) $P(\alpha \leq X \leq \beta) = F_X(\beta) - F_X(\alpha -)$

στ) $P(\alpha < X < \beta) = F_X(\beta -) - F_X(\alpha)$

ζ) $P(\alpha \leq X < \beta) = F_X(\beta -) - F_X(\alpha -)$

Αποδ. (α)

$\{X \leq \beta\} = \{\alpha < X \leq \beta\} \cup \{X \leq \alpha\}$

$P(X \leq \beta) = P(\alpha < X \leq \beta) + P(X \leq \alpha)$

$\Downarrow$

$P(\alpha < X \leq \beta) = P(X \leq \beta) - P(X \leq \alpha) = F_X(\beta) - F_X(\alpha)$

Παρατήρηση: Έστω α, β είναι σημεία συνέχειας της F_X
(Δηλ. $F_X(\alpha) = F_X(\alpha -) = \lim\limits_{n \to \infty} F_X(\alpha - 1/n)$)

Τότε:

$P(\alpha < X \leq \beta) = P(\alpha \leq X < \beta) = P(\alpha < X < \beta) = P(\alpha \leq X \leq \beta) =$
$= F_X(\beta) - F_X(\alpha)$

$P(X = \alpha) = 0$.

Παράδειγμα:

Έστω τ.μ. X με α.σ.κ.:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ x^2, & 0 \le x < 1/3 \\ 1/4, & \frac{1}{3} \le x < 2 \\ \frac{x-1}{4}, & 2 \le x < 3 \\ 1, & x \ge 3 \end{cases}$$

$P(\frac{1}{3} < X \le 3)$, $P(X=\frac{1}{3})$, $P(X=2)$

$P(1 \le X \le 5/2)$, $P(X<1/3)$, $P(X=3)$, $P(X>2)$

Λύση:

$P(\frac{1}{3} < X \le 3) = F_X(3) - F_X(\frac{1}{3}) = 1 - \frac{1}{4} = 3/4$

$P(X=\frac{1}{3}) = F_X(\frac{1}{3}) - F_X(\frac{1}{3}-) = \frac{1}{4} - (\frac{1}{3})^2 = \dots$

$P(X=2) = 0$ γιατι το 2 είναι σημείο συνέχειας?

$P(1 \le X \le \frac{5}{2}) = F_X(\frac{5}{2}) - F_X(1-) =$

$= \frac{(5/2)-1}{4} - \frac{1}{4} = \dots$

$P(X>2) = 1 - F_X(2) = 1 - \frac{1}{4} = 3/4$

$\vdash\!\dashv$